CONTINUITE ET LIMITES

Résultats à retenir :

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.

  S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

- Soit u et v deux fonctions . soit a , b et c finis ou infinis .
  Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$
- Soit f , u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I .
  Soit deux réels ℓ et ℓ' .
  - Si u(x) $\leq$ v(x) pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{a} u = \ell$ et $\lim\limits_{a} v = \ell'$

    alors $\ell \leq \ell'$.
  - Si u(x) $\leq f(x) \leq$ v(x) pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} v = \ell$

    alors $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Les résultats énoncés ci-dessous restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini , à droite en a ou à gauche en a .

- Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I .
  - Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{x \to a} u = +\infty$, alors

    $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
  - Si $f(x) \leq u(x)$ pour tout x $\neq$ a et si $\lim\limits_{x \to a} u = -\infty$, alors

    $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
Soit a et b deux réels de I tels que a < b .
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle [a , b] .
En particulier , si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans] a, b[.

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .
  Soit a et b deux réels de I tel que a < b. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dan s[a ,b] .
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
  Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .
- L'image d'un intervalle fermé borné [a ,b] par une fonction continue est un intervalle fermé borné [m ,M] .
  - Le réel m est le minimum de f sur [a , b] .
  - Le rée M est le maximum de f sur [a , b] .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type [a , b[(b fini ou infini) .
  - Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .
  - Si la fonction f es croissante et non majorée alors f possède une limite finie en b .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type] a , b] (a fini ou infini) . ù
  - Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
  - Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature .

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer les limites

1°/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ 2°/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(x-1)-1}{x^2+2x-3}$

3°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^3+x}$ 4°/ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$

5°/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{E(x)}{x+1}$ où E(x) désigne la partie entière de x

6°/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{tgx-1}{2\sin x-\sqrt{2}}$

7°/ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tg\, x$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes si elles existent :

1°/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ 2°/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$.

3°/ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3+x^2}}{x-1}$ 4°/ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)}$

5°/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}$

Exercice 3 :

Calculer les limites suivantes :

1°/ $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+ax}$ où $a\in\mathbb{R}$.

2°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x-5}}{2x}$ 3°/ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+x-1}+x$

4°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-mx$, où m est un paramètre réel.

Exercice 4 :

Calculer les limites :

1°/ $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}$ 2°/ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}$ 3°/ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{5\cos^2 x+\sin^2 x-4\cos x}$

4°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}$ 5°/ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ 6°/ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}$

Exercice 5 :

$$\text{Soit } f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x<0 \\ -2x^2 & \text{si } 0\le x<\frac{1}{\pi} \\ x^2(\cos(\frac{1}{x})-1) & \text{si } x\ge\frac{1}{\pi} \end{cases}$$

1°/ Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

2°/ Etudier la continuité de f .

Exercice 6 :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$x\mapsto\begin{cases} 3\sqrt{4x^2+2x+1}+2x-3 & \text{si } x\le0 \\ x(x-\frac{\pi}{4}) & \text{si } 0<x<\frac{\pi}{4} \\ \frac{-\cos x+\sin x+2}{3x+1} & \text{si } x\ge\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

1°/a) Déterminer $\lim\limits_{-\infty} f$.

b) Montrer que $\forall\ x \geq \frac{\pi}{4}$; $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2°/ Etudier la continuité de f en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(mx^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

m étant un paramètre réel non nul.

1°/ Prouver que f_m est une fonction impaire.

2°/ Prouver que f_m est continue sur $\mathbf{R}$.

3°/ Calculer $\lim\limits_{-\infty} f_m$ et $\lim\limits_{+\infty} f_m$.

Exercice 8 :

Soit $m \in \mathbf{R}^*$ et $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto m\sqrt{x^2 - m} + 2x$$

1°/ Préciser le domaine de définition de f_m.

2°/ Calculer $\lim\limits_{-\infty} f_m$ et $\lim\limits_{+\infty} f_m$.

Exercice 9 :

Soit la fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 + 3x + 1 & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & si\ x < 0 \end{cases}$$

1°/ Déterminer le domaine de définition de f.

2°/ Calculer les limites éventuelles de f respectives en $+\infty$ et en $-\infty$.

3°/ Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 10 :

Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=1+\sqrt{x} & si\ x>0. \\ f(x)=-1-\sqrt{-x} & si\ x<0 \end{cases}$

1°/ Préciser le domaine de définition de f.

2°/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3°/ Etudier la continuité de f en 0.

Exercice 11 :

Soit a un paramètre réel et f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=x^3+2ax+1 & si\ x\geq 1 \\ f(x)=ax^2+3x & si\ x<1 \end{cases}$$

1°/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2°/a) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

b) Déterminer a pour que f soit continue en 1.

Exercice 12 :

$f_m(x) = \sqrt{x^2+x+1}$ - m x où m est un paramètre réel

1°/ Montrer que $Df_m = \mathbb{R}$

2°/ Montrer que f_m est continue sur $\mathbb{R}$

3°/ Calculer suivant m , la limite de f_m en $+\infty$

4°/ Dans quel cas , la courbe Cf_m admet au voisinage de $+\infty$, une asymptote horizontale

5°/ Etudier le comportement de f au voisinage de $+\infty$

Exercice 13 :

$$f(x) = \frac{2x + \cos x}{x + 1}$$

1°/ Df

2°/ Calculer les limites de f à gauche et à droite de (-1) . Interpréter

3°/

a) Montrer que pour tout x > -1 on a :

$$\frac{2x - 1}{x + 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x + 1}$$

b) Calculer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter

4°/ Etudier la position de Cf par rapport à Δ : y = 2

5°/ Calculer $\lim\limits_{-\infty} f$

Exercice 14 :

$f : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & pour\ x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & pour\ x < 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 .

2°/ Ecrire le prolongement f_1 de f

3°/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter géométriquement .

Exercice 15 :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{pour } x \leq 0 \\ f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1°/ Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter

2°/ a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 0$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f$. Interpréter

3°/ Montrer que f est continue en 0

Exercice 16 :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{2x+1} & \text{pour } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{x}} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

1°/Montrer que f est continue en 0

2°/a)Montrer que Cf admet au voisinage de $-\infty$ un asymptotes oblique Δ

b) Etudier la position de Cf et Δ sur $\mathbb{R}^-$

3°/Calculer la limite de f en $+\infty$ interpréter .

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+4) = 5$$

2°/ On pose $X = x - 1$ lorsque $x \to 1$ alors $x \to 0$

d'où $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\cos(x-1)-1}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos X - 1}{X(X+4)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{X+4} \cdot \frac{1-\cos X}{X} = 0$

3°/ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1-\cos X}{X^2} = \frac{1}{2}$

4°/ On a : $E(x) \le x \le E(x) + 1 \Rightarrow x - 1 < E(x) \le x$

Pour $x > 0$ on a : $x + 1 > 0$ d'où

$$\frac{x-1}{x+1} < \frac{E(x)}{x+1} \le \frac{x}{x+1}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{E(x)}{x+1} = 1$

Solution 2 :

1°/ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)\cdot(\sqrt{x+3}+2)} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$

2°/ $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)-(2x+1)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}} = \frac{-1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{3}}.$$

3°/ $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3+x^2}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3+x^2})(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+2})}{(x-1)(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{(x-1)(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2})} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-(x+1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3+x^2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

4°/ • On a : $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ et lorsque $x\to 2^+$,

$|x-2|=x-2$ et $|x|=x$ donc

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3}.$$

Lorsque $x\to 2^-$, $|x-2|=-(x-2)$ et $|x|=x$ donc

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-x(x-2)}{x(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{x+1} = \frac{-1}{3}.$$

on a : $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)}$ donc la fonction

$x \mapsto \frac{|x|\cdot|x-2|}{x(x^2-x-2)}$ n'admet pas de limite lorsque $x\to 2$.

5°/ $$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^2|+|x|}{|x^2|-|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|(|x|+1)}{|x|\cdot(|x|-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|+1}{|x|-1} = -1.$$

Solution 3 :

1°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+ax}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$.

2°/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-5}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2})}}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}}=-\dfrac{1}{2}$.

3°/ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^2+x-1}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}x(1-\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}})=+\infty$ car

$\lim\limits_{x\to-\infty}1-\sqrt{3+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=1-\sqrt{3}<0$

4°/ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-mx=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-m)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-m=1-m$

- Si $m<1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-mx=+\infty$
- Si $m>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-mx=-\infty$
- Si $m=1$:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1)}=\dfrac{1}{2}$

Solution 4 :

1°/ $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{1}=1$.

2°/ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin 2x}{x}}=\frac{1+2}{1-2}=-3$

(car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b}$).

3°/ on a : $5\cos^2 x+\sin^2 x-4\cos x=5\cos^2 x+1-\cos^2 x-4\cos x$

$=4\cos^2 x-4\cos x+1=(2\cos x-1)^2$ donc :

$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{5\cos^2 x+\sin^2 x-4\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{(2\cos x-1)^2}=+\infty$ car $\sin\frac{\pi}{3}>0$

et $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)^2=0^+$.

4°/ On a, d'une part $\forall x\in\mathbb{R}, -1\leq\sin x\leq 1\Rightarrow 1\leq 2+\sin x\leq 3\Rightarrow$

$\frac{1}{3}\leq\frac{1}{2+\sin x}\leq 1$ **(1)**

et d'autre part : $-1\leq-\sin^2 x\leq 0\Rightarrow x-1\leq x-\sin^2 x\leq x$ **(2)**.

En multipliant les 2 encadrements (1) et (2) on obtient : $\forall x>1$

$\frac{x-1}{3}\leq\frac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}\leq x\Rightarrow\forall x>1,\ \frac{x-1}{3}\leq\frac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}$ or

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{3}=+\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin^2 x}{2+\sin x}=+\infty$.

5°/ Posons $X=\frac{1}{x}$. Lorsque $x\to+\infty$ alors $X\to0^+$ d'où

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\sin X}{X}=1$.

6°/ $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(x^2)-\sin(ax)}{x-a}$.

Posons $h(x)=\sin(x^2)-\sin(ax)$. On a : $h(a)=0$ d'où :

$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x^2-\sin a^2}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$ (car h est dérivable sur **R**).

Or $h'(x)=2x\cos(x^2)-a\cos(ax)$ d'où $h'(a)=a\cos(a^2)$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x}=a\cos(a^2)$.

Solution 5 :

1°/ • $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{X\to0^-}\frac{1}{X}\sin X=\lim\limits_{X\to0^-}\frac{\sin X}{X}=1$

($X=\frac{1}{x}$, quand $x\to-\infty$ alors $X\to0^-$).

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\cos(\frac{1}{x})-1)$. On pose $X=\frac{1}{x}$; quand

$x\to+\infty$ alors $X\to0^+$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,[\cos(\frac{1}{x})-1]=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{1}{X^2}(\cos X-1)=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{\cos X-1}{X^2}=\frac{-1}{2}$.

2°/ $x\mapsto x\sin(\frac{1}{x})$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit et composée de fonctions continues) alors f est continue sur $]-\infty,0[$.

• $x\mapsto-2x^2$ est continue sur **R** (fonction polynôme) donc f est continue sur $]0,\frac{1}{\pi}[$.

• $x \mapsto x^2(\cos(\frac{1}{x})-1)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (produit et composée de fonctions continues) donc f est continue sur $]\frac{1}{\pi}, +\infty[$.

<u>*Continuité de f en $x_0 = 0$*</u> :

• $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x\sin(\frac{1}{x})$.

On a : $\forall\, x < 0$: $-1 \le \sin(\frac{1}{x}) \le 1$ d'où $x \le x\sin(\frac{1}{x}) \le -x$

Et comme $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} (-x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -2x^2 = 0$

on a : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$ donc f est continue en $x_0 = 0$.

<u>*Continuité de f en $x_0 = \frac{1}{\pi}$*</u> :

$$\lim_{x \to \frac{1}{\pi}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{\pi}^-} -2x^2 = \frac{-2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{\pi}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{\pi}^+} x^2(\cos(\frac{1}{x})-1) = \frac{1}{\pi^2}(\cos\pi - 1) = \frac{-2}{\pi^2}$$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{\pi}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{\pi}^+} f(x) = f(\frac{1}{\pi})$ donc f est continue en $x_0 = \frac{1}{\pi}$.

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 6 :

1°/a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3\sqrt{4x^2+2x+1} + 2x - 3$

$$= \lim_{x \to -\infty} 3\sqrt{x^2(4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} + 2x - 3 = \lim_{x \to -\infty} 3|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + 2x - 3$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -3x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + 2x - 3 = \lim_{x \to -\infty} x(-3\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + 2 - \frac{3}{x}) = +\infty$$

b) • On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $-1 \le \sin x \le 1$ et $-1 \le -\cos x \le 1$

donc $-2 \le -\cos x + \sin x \le 2 \Rightarrow 0 \le 2 - \cos x + \sin x \le 4$

d'autre part on a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $3x+1 > 0$ donc $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $f(x) \ge 0$

• On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $2 - \cos x + \sin x \le 4 \Rightarrow \dfrac{2 - \cos x + \sin x}{3x+1} \le \dfrac{4}{3x+1}$

or $\dfrac{4}{3x+1} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{-(2x+2)}{x(3x+1)} \le 0$ car $x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$ d'où $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $f(x) \le \dfrac{2}{x}$.

Conclusion : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $0 \le f(x) \le \dfrac{2}{x}$.

• On a : $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, +\infty[$, $0 \le f(x) \le \dfrac{2}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2°/• $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^-} x(x - \frac{\pi}{4}) = 0$

• $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}^+} \dfrac{-\cos x + \sin x + 2}{3x+1} = \dfrac{2}{3 \cdot \frac{\pi}{4} + 1}$

$f(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{2}{\frac{3\pi}{4} + 1}$ donc f n'est pas continue à gauche en $\frac{\pi}{4}$, et f est

continue à droite en $\frac{\pi}{4}$.

Solution 7 :

1°/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f_m(-x) = -f_m(x)$ donc f_m est impaire.

2°/ La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(mx^2)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée et

produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$: $x \mapsto \sin(mx^2)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

• $\lim\limits_{x \to 0} f_m(x) = \lim\limits_{x \to 0} x \dfrac{\sin(mx^2)}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(mx^2)}{x^2} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin(mX)}{X} = m$

donc $\lim_{x\to 0} f_m(x) = 0 \cdot m = 0 = f_m(0)$ d'où f_m est continue en 0.

Conclusion : f_m est continue sur $\mathbf{R}$.

3°/ $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 \leq \sin(mx^2) \leq 1$ donc pour tout $x<0$ on a :

$\frac{1}{x} \leq f_m(x) \leq \frac{-1}{x}$ et comme $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x} = 0$ alors $\lim_{x\to-\infty} f_m(x) = 0$.

- $\forall x>0$, $\frac{-1}{x} \leq f_m(x) \leq \frac{1}{x}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f_m(x) = 0$.

Solution 8 :

1°/ $D_{f_m} = \{ x \in \mathbf{R}$ tel que $x^2 - m \geq 0 \}$

(*) $x^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^2 = m$.

- Si $m>0$ (*) admet deux solutions $x' = \sqrt{m}$ et $x'' = -\sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		$\sqrt{m}$		$+\infty$
$x^2 - m$		+	0	−	0	+	

$D_{f_m} =]-\infty, -\sqrt{m}] \cup [\sqrt{m}, +\infty[$.

- Si $m<0$: $x^2 - m > 0$; $D_{f_m} = \mathbf{R}$.

2°/ $\lim_{x\to-\infty} m\sqrt{x^2 - m} + 2x = \lim_{x\to-\infty} m|x|\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2x$

$$= \lim_{x\to-\infty} x(-m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2)$$

- $\lim_{x\to-\infty} x = +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} -m\sqrt{1 - \frac{m}{x^2}} + 2 = -m + 2$

m	$-\infty$		2		$+\infty$
$-m+2$		+	0	−	

– Si $m<2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f_m(x) = +\infty$

– Si $m>2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty$

$- \text{Si } m=2 \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} 2\sqrt{x^2-2}+2x = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4(x^2-2)-4x^2}{(2\sqrt{x^2-2}-2x)}$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{x^2-2}-x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} m\sqrt{x^2(1-\frac{m}{x^2})}+2x = \lim\limits_{x \to +\infty} mx\sqrt{1-\frac{m}{x^2}}+2x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x[m\sqrt{1-\frac{m}{x^2}}+2]$

or $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} m\sqrt{1-\frac{m}{x^2}}+2 = m+2$

m	$-\infty$		-2		$+\infty$
$m+2$		$-$	0	$+$	

$- \text{Si } m<-2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = -\infty$

$- \text{Si } m>-2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = +\infty$

$- \text{Si } m=-2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2\sqrt{x^2+2}+2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2-4(x^2+2)}{2x+2\sqrt{x^2+2}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-4}{x+\sqrt{x^2+2}} = 0$

Solution 9 :

1°/• La fonction $x \mapsto x^2+3x+1$ est définie sur **R** et en particulier sur $[0,+\infty[$.

• La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $\mathbf{R}^*$ et en particulier sur

$]-\infty,0[$ donc $D_f = \mathbf{R}$.

2°/• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$.

• on a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $-1\le\sin x\le 1$ donc $\forall x\in\mathbb{R}_-^*$, $\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le-\frac{1}{x}$ et

comme $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

3°/• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x^2+3x+1=1$.

• $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$.

donc $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1=f(0)$ et par suite f est continue en 0.

Solution 10 :

1°/ $D_f=\mathbb{R}$.

2°/• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -1-\sqrt{-x}=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\sqrt{x}=+\infty$.

3°/• $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} 1+\sqrt{x}=1=f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

• $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} -1-\sqrt{-x}=-1\ne f(0)$ donc f n'est pas continue

à gauche en 0 et par conséquent f n'est pas continue en 0.

Solution 11 :

1°/• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} ax^2+3x=\begin{cases}-\infty & si\ a=0\\ +\infty & si\ a>0\\ -\infty & si\ a<0\end{cases}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2ax+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

2°/a) • $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^3 + 2ax + 1 = 2a + 2$.

• $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ax^2 + 3x = a + 3$.

b) f est continue en 1 ssi $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$2a + 2 = a + 3 \Leftrightarrow a = 1$.

Solution 12 :

1°/On a : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 + x + 1 > 0$ ($\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$)

D'où : $Df_m = \mathbb{R}$

2°/$P(x) = x^2 + x + 1$

P est une fonction polynôme donc P est continue sur $\mathbb{R}$

et comme pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) > 0$ alors $\sqrt{P}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$Q(x) = mx$

Q est une fonction polynôme alors Q est continue sur $\mathbb{R}$

On a : $f = \sqrt{P} - Q$ d'où f est continue sur $\mathbb{R}$

3°/ $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - mx = \lim\limits_{+\infty}\left(x\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - mx\right)$

$= \lim\limits_{+\infty} x\left(\sqrt{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - m\right)$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - m = 1 - m \end{cases}$

m	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-m$		+	0	-	

Pour $m < 1$: $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

Pour m > 1 : $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$

Pour m = 1 :

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim_{+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x} = \lim_{+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

4°/On a : $\lim\limits_{+\infty} f_m$ est finie si m = 1

D'où pour m = 1 , Cf_m admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y = \frac{1}{2}$

5°/ $\lim\limits_{+\infty} f_m(x) = \begin{cases} +\infty \text{ pour } m < 1 \\ -\infty \text{ pour } m > 1 \\ \frac{1}{2} \text{ pour } m = 1 \end{cases}$

Pour $m \neq 1$ on a :

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - mx}{x}$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{x.\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} - m\right)}{x} = 1 - m$$

$$\lim_{+\infty} [f(x) - (1-m)x]$$

$$= \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - mx - x + mx$$

$$= \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \frac{1}{2}$$

D'où : $D_m : y = (1-m)x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à Cf_m au voisinage de $+\infty$

Solution 13 :

1°/ $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2°/ $\lim\limits_{(-1)^-} f = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{2x + \cos x}{x+1}$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{(-1)^-} x+1 = 0^- \\ \lim\limits_{x \to (-1)^-} 2x + \cos x = -2 + \cos(-1) < 0 \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{(-1)^-} f = +\infty$

$\lim\limits_{(-1)^+} f = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{2x + \cos x}{x+1}$

On a : $\begin{cases} \lim\limits_{(-1)^+} 2x + \cos x = -2 + \cos(-1) < 0 \\ \lim\limits_{x \to (-1)^+} (x+1) = 0^+ \end{cases}$

D'où : $\lim\limits_{(-1)^+} f = -\infty$

D : x = -1 est une asymptote verticale à Cf

3°/

a) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 2x - 1 \leq \cos x - 2x \leq 2x + 1$

Or pour tout $x \in]-1, +\infty[$ on a : $x + 1 > 0$

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$$

b)

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

Et comme pour tout x > -1 on a :

$$\frac{2x-1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x+1}{x+1}$$

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 2$

D : y = 2 est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$.

4°/ $d(x) = f(x) - y = \frac{2x+\cos x}{x+1} - 2 = \frac{2x+\cos x - 2x - 2}{x+1}$

$= \frac{\cos x - 2}{x+1}$

On a : pour tout $x \in Df$: $\cos x - 2 < 0$

• pour $x \in]-\infty, -1[$: $d(x) > 0$

d'où Cf est au dessus de Δ sur $]-1, +\infty[$

• pour $x \in]-1, +\infty[$: $d(x) < 0$

$\Rightarrow$ Cf est au dessous de Δ sur $]-1, +\infty[$

5°/ on a : $2x - 1 \leq 2x + \cos x \leq 2x + 1$

pour $x < -1$ on a : $x + 1 < 0$

d'où : $\forall x < -1$: $\frac{2x+1}{x+1} \leq f(x) \leq \frac{2x-1}{x+1}$

on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x+1} = 2$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$

d'où $\lim\limits_{-\infty} f = 2$

Solution 14 :

1°/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(1+x^2-1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{0}{2} = 0$$

On a : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$ donc f est prolongeable par continuité en 0

2°/ $\begin{cases} f_1(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \\ f_1(0) = \lim_0 f = 0 \end{cases}$

3°/ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$?

$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$

$\Rightarrow$ Pour tout $x > 0$: $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$

On a : $\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} \quad \text{pour tout } x > 0 \\ \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} - \frac{1}{x} \right) = -1$$

D_1 : $y = 0$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

D_2 : $y = -1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

Solution 15 :

1°/ $\lim_{x \to -\infty} f = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$ ($x < 0$ alors $|x| = -x$)

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1$$

Conclusion : $\lim y = -1$ donc D : y = -1 est une asymptote horizontale à Cf au voisinage de $-\infty$

2°/

a) On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$

D'où : $\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} \leq 0$ pour x > 0

b) On a : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = 0 \\ et \sqrt{x} > 0 : \frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$

D'où : D' : y = 0 est ue asymptote horizontale à Cf au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right) = 0 \times 0 = 0$$

3°/ $\lim\limits_{x \to 0^-} f = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{0}{\sqrt{1}} = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f = \lim\limits_{x \to 0^-} f = 0 = f(0)$

D'où f est continue en 0

b) $$* \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x} \right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$* \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} -\sqrt{x}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$$

$$= 0 \times \frac{1}{2} = 0 = f'_d(0)$$

$f'_g(0) \neq f'_d(0)$ d'où f n'est pas dérivable en 0

Cf admet deux demi-tangentes en 0

$T_1 : \begin{cases} y = x \\ x \leq 0 \end{cases}$; $T_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Solution 16 :

1°/• $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2}{2x+1} = 0$

• $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\frac{\sin x}{x} = 0\times1 = 0$

On a : $f(0) = 0$ et $\lim_{0} f = 0$ alors f est continue en 0

2°/a) $\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2} = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

• $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{4x+2} = \frac{-1}{4}$

D : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une asymptote à Cf au voisinage de $-\infty$

b) Pour $x \in \mathbb{R}^-$: $f(x) - y = \frac{x^2}{2x+1} - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{x^2}{2x+1} - \frac{2x-1}{4}$.

$$= \frac{4x^2 - (2x-1)(2x+1)}{4(2x+1)} = \frac{1}{4(2x+1)}$$

Pour $x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$: $f(x) - y < 0$ donc Cf est e dessous de Δ

Pour $x \in \left]-\frac{1}{2}, 0\right[$: Cf est au dessus de Δ

3°/Pour $x > 0$: $-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} f = 0$

D : $y = 0$ est une asymptote à Cf au voisinage de $+\infty$.